

# STUDI MENGENAI METODE SUPERPOSISI RAGAM EFEKTIF UNTUK STRUKTUR DENGAN REDAMAN NON-KLASIK

Dennie Supriatna, Bambang Suryoatmono,  
Dosen Fakultas Teknik Program Studi Teknik Sipil Universitas Katolik Parahyangan

OCTOBER 2011

## ABSTRAK

Metode percepatan ragam dan metode *truncation augmentation*, memperbaiki cara metode superposisi ragam standar dengan melengkapi bagian ragam yang terpotong. Kedua metode ini sudah digunakan untuk struktur teredam secara klasik. Untuk mengaplikasikan kedua metode ini pada sistem dengan redaman non-klasik, sistem ini harus didekati dengan sistem redaman klasik. Setiap metode merupakan suatu ekspansi menuju sistem teredam secara non-klasik untuk analisis yang efisien dan akurat tanpa memodelkan struktur sebagai sistem teredam secara non-klasik. Pendekatan *state space* digunakan untuk ekspansi pada kedua metode. Keabsahan kedua metode diverifikasi secara analisis dan numerik. Kestabilan metode *modal truncation augmentation* bergantung pada beban luar. Sehingga stabilitas metode ini sangat ditentukan oleh pembebanan tersebut. Sedangkan untuk metode percepatan ragam tidak dideterminasi oleh kondisi kestabilan tersebut. Pada kondisi stabil, kedua metode menghasilkan output yang sama.

Kata kunci : metode percepatan ragam, metode modal *truncation augmentation*, *state space*, redaman non-klasik

### 1. Pengantar

Dalam dunia *engineering* sangat banyak persoalan yang dianalisis dengan suatu model pendekatan. Hal tersebut disebabkan sulitnya pemodelan eksak dalam proses pencarian solusinya. Salah satu permasalahan adalah dalam analisis dinamika struktur, khususnya pemodelan redaman. Pemodelan redaman yang dewasa ini dilakukan adalah redaman klasik. Sistem teredam secara klasik tidak memadai untuk beberapa kasus khusus, maka banyak penelitian dilakukan untuk mengarahkan pencarian respons struktur dengan metode redaman secara non-klasik. Perbedaan antara sistem teredam secara klasik dan non-klasik terletak pada asumsi koefisien redaman. Pada sistem teredam secara klasik, redaman diasumsikan dapat didiagonalisasi sehingga persamaan diferensial dapat di-*uncoupled*, sedangkan pada sistem redaman secara non-klasik hal tersebut tidak dilakukan. Dalam beberapa kasus khusus, sistem redaman

klasik tidak mewakili respon sebenarnya. Beberapa kasus tersebut adalah struktur dengan dasar terisolasi dan struktur dengan peralatan redaman khusus. Kasus lain adalah sistem interaksi tanah struktur.

Pendekatan pada analisis redaman non-klasik adalah dengan metode percepatan ragam (*mode acceleration method*) dan *modal truncation augmentation method*. Kedua metode ini merupakan suatu ekspansi menuju sistem redaman non-klasik. Disamping itu kedua metode ini memberikan hasil yang lebih efisien daripada metode superposisi ragam standar.

Pemodelan redaman dapat diklasifikasikan menjadi 2 bagian besar. Yang pertama adalah pemodelan redaman proporsional terhadap matriks massa dan matriks kekakuan. Pemodelan ini dikenal dengan pemodelan redaman klasik (*classical damping*) atau disebut juga *proportional damping*. Yang kedua adalah matriks redaman yang tidak proporsional terhadap matriks massa dan matriks kekakuan.

Pemodelan ini dikenal dengan pemodelan redaman klasik (*classical damping*) atau disebut juga *proportional damping*. Yang kedua adalah matriks redaman yang tidak proporsional terhadap matriks massa dan matriks kekakuan. Pemodelan ini dikenal dengan pemodelan redaman non-klasik (*non-classical damping*) atau disebut juga *non-proportional damping*. Untuk pemodelan redaman non-klasik, sifat ortogonalitas terhadap ragam tidak berlaku.

Permasalahan lain yang terjadi adalah pada metode superposisi ragam. Pada metode superposisi ragam, khususnya untuk sistem berderajat kebebasan banyak, cukup sulit untuk mencari semua ragam baik dengan metode determinan maupun dengan metode Stodola. Yang biasa dilakukan adalah dengan mengambil jumlah ragam secukupnya dan mengambil faktor keamanan seperlunya. Hal tersebut tidak selalu dapat dilakukan, untuk kasus tertentu kemungkinan ragam yang menentukan perilaku struktur bisa saja merupakan ragam yang tinggi (*high modes*). Karena itu dalam skripsi ini, akan dibahas metode lain yang dapat dianggap representatif tanpa harus memperhitungkan semua ragam. Metode tersebut adalah metode percepatan ragam (*mode acceleration method*) dan modal truncation augmentation method.

### 1. Dengan Redaman Non-Klasik

Metode analisis dinamik terbagi menjadi 2 bagian besar. Bagian pertama adalah *direct integration method*, dan bagian kedua adalah metode superposisi ragam.

Pada kasus dimana terdapat redaman non-klasik, metode superposisi ragam dapat digunakan yaitu dengan menggandakan matriks ukuran sistem persamaan diferensial gerak. Redaman non-klasik berperilaku berbeda dengan redaman klasik. Redaman tidak berbanding lurus dengan massa dan kekakuan struktur. Sistem dengan redaman klasik dapat bergetar secara bebas dalam sejumlah ragam *uncoupled*, dengan bentuk seperti ragam tidak teredam. Persamaan 3

Secara kontras, sistem dengan

redaman non-klasik (*non-proportional*) dapat terbentuk dari getaran bebas dengan sejumlah ragam *uncoupled* yang mana setiap titik dapat berdeformasi mengikuti kurva redaman secara eksponensial pada frekuensi yang sama, namun pada sudut fase yang berbeda. Karena itu belum tentu pada saat yang sama satu nodal mengalami peralihan maksimum, dan nodal yang lain juga mengalami peralihan maksimum. Jadi pada sistem redaman secara non-klasik, setiap vektor eigen yang terjadi (ragam) ditentukan tidak hanya oleh amplitudo, tapi juga oleh sudut fase.

Dengan demikian, pada analisis sistem redaman secara non-klasik perhitungan melibatkan bilangan kompleks sebab sistem bilangan ini dapat merepresentasikan besaran yang memiliki perbedaan fase sekaligus amplitudo (*magnitude*). Kedua besaran tersebut dapat digambar dengan koordinat vektor pada diagram Argand.

Koefisien matriks massa, kekakuan dan redaman dilakukan dengan asumsi:

1. Massa terpusat (*lumped mass*)
2. Bangunan berupa *shear building* (10 lantai) bidang
3. Beban yang bekerja adalah beban sinusoidal
4. Redaman adalah hasil superposisi dari *internal damping* (diasumsikan redaman klasik) dan *external damping* yang merupakan redaman non-klasik

Persamaan yang digunakan dalam asumsi *proportional damping* adalah

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad 1$$

Koefisien-koefisien pengali massa dan kekakuan dapat dicari dengan pendekatan:

$$\alpha = 2\omega_1\omega_2 \frac{(\omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad 2$$

$$\beta = \frac{2(\omega_2\xi_2 - \omega_1\xi_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad 3$$

## 9. Daftar Pustaka

- [1] Cheng, Franklin.Y. (2002). *Matrix Analysis of Structural Dynamics*. Marcell Dekker, Inc
- [2] Chopra, A. K.(1995) *Dynamics of Structures*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- [3] Churchill, Ruel V and Brown, James Ward.(1990). *Complex Variables and Applications*, fifth edition. McGraw-Hall, Inc.
- [4] Clough R.W. and Penzien, J(1993) *Dynamics of Structural*, second edition. McGraw-Hall, New York.
- [5] Craig, Roy. R. Jr (1981). *Structural Dynamics*. John Wiley & Sons
- [6] Dewobroto, Wiryanto(2004) *Aplikasi Sain dan Teknik dengan Visual Basic 6.0*, Edisi ke 2. Penerbit PT Elex Media Komputinto Kelompok Gramedia, Jakarta
- [7] Dickens, J. M, Nakagawa, J.M., and Wittbrodt, M., J.(1997). " *A Critique of Mode Acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis.*" *Computers and Structures*, 62(6), p. 985-998
- [8] Hahn, Liang-shin(1994). *Complex Numbers and Geometry*. The Mathematical Association of America.
- [9] Hurty, W.C and Rubinstein, M. F (1964). *Dynamics of Structure*. Clifton, NJ, Prentice-Hall
- [10] James, Glyn (1999). *Advanced Modern Engineering Mathematics*, second edition. Prentice Hall, New York
- [11] Paz, Mario. (1985). *Structural Dynamics 2nd Edition*. Van Nostran, New York.
- [12] Sang-Won Cho, Hung-Jo Jung and In Won Lee (June 2005). " *Efficient Mode Superposition Methods for Non-Classically Damped System*", *Steel Structures*.

## **INFORMASI UNTUK PENULISAN NASKAH JURNAL TEKNIK SIPIL UBL**

### **Persyaratan Penulisan Naskah**

1. Tulisan/naskah terbuka untuk umum sesuai dengan bidang teknik sipil.
2. Naskah dapat berupa :
  - a. Hasil penelitian, atau
  - b. Kajian yang ditambah pemikiran penerapannya pada kasus tertentu, yang belum dipublikasikan,

Naskah ditulis dalam bahasa Indonesia atau Inggris. Naskah berupa rekaman dalam Disc (disertai dua eksemplar cetakannya) dengan panjang maksimum dua puluh halaman dengan ukuran kertas A4, ketikan satu spasi, jenis huruf Times New Roman (font size 11). Naskah diketik dalam pengolah kata MsWord dalam bentuk siap cetak.

### **Tata Cara Penulisan Naskah**

1. Sistematika penulisan disusun sebagai berikut :
  - a. Bagian Awal : judul, nama penulis, alamat penulis dan abstrak (dalam dua bahasa : Indonesia dan Inggris)
  - b. Bagian Utama : pendahuluan (latar belakang, permasalahan, tujuan) , tulisan pokok (tinjauan pustaka, metode, data dan pembahasan. ), kesimpulan (dan saran)
  - c. Bagian Akhir : catatan kaki (kalau ada) dan daftar pustaka. Judul tulisan sesingkat mungkin dan jelas, seluruhnya dengan huruf kapital dan ditulis secara simetris.
2. Nama penulis ditulis :
  - a. Di bawah judul tanpa gelar diawali huruf kapital, huruf simetris, jika penulis lebih dari satu orang, semua nama dicantumkan secara lengkap.
  - b. Di catatan kaki, nama lengkap dengan gelar (untuk memudahkan komunikasi formal) disertai keterangan pekerjaan/profesi/instansi (dan kotanya, ); apabila penulis lebih dari satu orang, semua nama dicantumkan secara lengkap.
3. Abstrak memuat semua inti permasalahan, cara pemecahannya, dari hasil yang diperoleh dan memuat tidak lebih dari 200 kata, diketik satu spasi (font size 11).
4. Teknik penulisan : Untuk kata asing dituskan huruf miring.
  - a. Alinea baru dimulai pada ketikan kelima dari batas tepi kiri, antar alinea tidak diberi tambahan spasi.
  - b. Batas pengetikan : tepi atas tiga centimeter, tepi bawah dua centimeter, sisi kiri tiga centimeter dan sisi kanan dua centimeter.
  - c. Tabel dan gambar harus diberi keterangan yang jelas.
  - d. Gambar harus bisa dibaca dengan jelas jika diperkecil sampai dengan 50%.
  - e. Sumber pustaka dituliskan dalam bentuk uraian hanya terdiri dari nama penulis dan tahun penerbitan. Nama penulis tersebut harus tepat sama dengan nama yang tertulis dalam daftar pustaka.
5. Untuk penulisan keterangan pada gambar, ditulis seperti : gambar 1, demikian juga dengan Tabel 1., Grafik 1. dan sebagainya.
6. Bila sumber gambar diambil dari buku atau sumber lain, maka di bawah keterangan gambar ditulis nama penulis dan tahun penerbitan.
7. Daftar pustaka ditulis dalam urutan abjad nama penulisan dan secara kronologis : nama, tahun terbit, judul (diketik miring), jilid, edisi, nama penerbit, tempat terbit.

dimana :

$\omega_i$  = frekuensi alami sudut ke i

$\xi_i$  = rasio redaman ke-i

Persamaan gerak sistem struktur linear adalah sebagai berikut:

$$[M] \cdot \{u(t)\} + [C] \cdot \{u(t)\} + [K] \cdot \{u(t)\} = \{R_0\} r(t) \quad 4$$

dengan: [M] = matriks massa

[C] = matriks redaman (n x n)

[K] = matriks kekakuan (nxn)

{R<sub>0</sub>} = matriks beban ruang invariant ( n x 1)

r(t) = matriks beban ruang variant (dinyatakan dalam scalar)

{u(t)} = vektor perpindahan ( n x 1)

Persamaan tersebut ditransformasi ke koordinat ragam sbb:

$$U(t) = [\Phi] \cdot q(t) \quad 5$$

Sampai diperoleh persamaan diferensial yang sudah diuncoupling yaitu :

$$\ddot{q}(t) + 2\xi_i\omega_i \dot{q}(t) + \omega_i^2 q(t) = \phi_i^T R_0 r(t) \quad 6$$

dengan  $\phi_i$  = vektor eigen ke-i

$\omega_i$  = frekuensi alami sudut ke-i

$\xi_i$  = rasio redaman pada sistem

Untuk mencari respons, metode superposisi ragam (*mode displacement method*) sistem teredam secara klasik:

$$u(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i \cdot q_i(t) \quad 7$$

dengan  $m \ll n$

*Mode displacement method* memberikan respons pendekatan sebab jumlah ragam yang digunakan (m) lebih kecil daripada total ragam sistem.

Jika sistem teredam secara non-klasik, persamaan 4 tidak dapat ditransformasi menjadi n persamaan *uncoupled* sebab matriks [C] tidak bisa didiagnalikasi. Untuk mengaplikasi *mode superposition method*

pada sistem teredam secara non-klasik, sistem persamaan diferensial ditransformasikan menjadi persamaan diferensial ordo 1 dengan menyatakan persamaan diferensial gerak dalam persamaan state space. Persamaan yang baru untuk sistem teredam secara non-klasik adalah:

$$B \cdot \dot{y}(t) - A \cdot y(t) = F_0 r(t) \quad 8$$

$$\text{Dimana: } A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad F_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pada analisis respons ragam, koordinat fisik dari persamaan 6 ditransformasikan menjadi koordinat ragam z(t), dengan [Ψ] sebagai vector eigen.

$$y(t) = [\Psi] \cdot z(t) \quad 9$$

Dengan [Ψ] didapat dari masalah nilai eigen:

$$A \Psi_i = s_i \cdot B \Psi_i \quad 10$$

dengan

$s_i$  = nilai eigen, dapat berupa bilangan kompleks dan konjugatnya;

$\psi_i$  = vektor eigen ke-i

Persamaan dinamik dapat ditransformasikan menjadi 2n persamaan *uncoupled*

$$z_i(t) - s_i z_i(t) = \psi_i^T F_0 r(t) \quad 11$$

Pada persamaan di atas,  $z_i(t)$  dapat terjadi pada sistem bilangan kompleks. Maka persamaan respons dapat diperoleh dengan mengambil 2q ragam dari pasangan bilangan kompleks dan konjugatnya.

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2q} \psi_i \cdot z_i(t) \quad 12$$

q merupakan ragam yang digunakan, dengan  $q \ll n$ .

Nilai dan vektor eigen dalam penelitian ini dilakukan dengan cara iterasi. Langkah iterasi adalah sebagai berikut :

Jika suatu vektor eigen  $\{\Phi\}$ , maka permasalahan nilai eigen adalah:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i &= s_i \cdot [D] \cdot \{\phi\}_i & 13 \\ \text{dengan } [D] &= [A]^{-1} \cdot [B] & 14 \\ \{\phi\} &= \{\varepsilon\} + i \cdot \{\sigma\} & 15 \\ \lambda &= a + i \cdot b & 16 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan 15 dan 16 ke persamaan 13, didapat:

$$\begin{aligned} (a + i \cdot b) \cdot \{\{\varepsilon\} + i \cdot \{\sigma\}\} &= [D] \cdot \{\{\varepsilon\} + i \cdot \{\sigma\}\} & 17 \\ (a \cdot \varepsilon - b \cdot \sigma) + (a \cdot \sigma - b \cdot \varepsilon) \cdot i &= D \cdot \varepsilon + i \cdot D \sigma & 18 \end{aligned}$$

Jika iterasi dengan cara yang sama sampai dengan r kali maka:

Bagian riil:

$$D^r \{\varepsilon\} = a \cdot^r \{\varepsilon\} - b \cdot^r \{\sigma\} = {}^{r+1} \{\varepsilon\} \quad 19$$

Bagian imajiner:

$$D^r \{\sigma\} = b \cdot^r \{\varepsilon\} + a \cdot^r \{\sigma\} = {}^{r+1} \{\sigma\} \quad 20$$

Ubah posisi persamaan:

$${}^r \{\sigma\} = \frac{a}{b} \cdot^r \{\varepsilon\} - \frac{1}{b} \cdot {}^{r+1} \{\varepsilon\} \quad 21$$

$${}^r \{\sigma\} = \frac{1}{a} \cdot {}^{r+1} \{\sigma\} - \frac{b}{a} \cdot^r \{\varepsilon\} \quad 22$$

$${}^r \{\sigma\} = \frac{1}{a} \cdot {}^{r+1} \{\sigma\} - \frac{b}{a} \cdot^r \{\varepsilon\} \quad 22$$

eliminasi  ${}^r \{\sigma\}$ , didapat

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot^r \{\varepsilon\} - \frac{1}{b} \cdot {}^{r+1} \{\varepsilon\} - \frac{1}{a} \cdot {}^{r+1} \{\sigma\} = 0 \quad 23$$

ganti r dengan r + 1 pada persamaan 23 dan substitusi ke persamaan 18, didapat:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot^r \{\varepsilon\} - \frac{2}{b} \cdot {}^{r+1} \{\varepsilon\} + \frac{1}{a \cdot b} \cdot {}^{r+2} \{\varepsilon\} = 0 \quad 24$$

kalikan dengan ab, didapat:

$$(a^2 + b^2) \cdot^r \{\varepsilon\} - 2 \cdot a \cdot {}^{r+1} \{\varepsilon\} + {}^{r+2} \{\varepsilon\} = 0 \quad 25$$

ganti r dengan r + 1

$$(a^2 + b^2) \cdot {}^{r+1} \{\varepsilon\} - 2 \cdot a \cdot {}^{r+2} \{\varepsilon\} + {}^{r+3} \{\varepsilon\} = 0 \quad 26$$

Tulis ulang 2 persamaan di atas dengan komponen ke-i:

$$(a^2 + b^2) \cdot^r \varepsilon_i - 2 \cdot a \cdot {}^{r+1} \varepsilon_i + {}^{r+2} \varepsilon_i = 0 \quad 27$$

$$(a^2 + b^2) \cdot {}^{r+1} \varepsilon_i - 2 \cdot a \cdot {}^{r+2} \varepsilon_i + {}^{r+3} \varepsilon_i = 0 \quad 28$$

didapat:

$$a^2 + b^2 = \frac{{}^{r+1} \varepsilon_i \cdot {}^{r+3} \varepsilon_i - ({}^{r+2} \varepsilon_i)^2}{{}^r \varepsilon_i \cdot {}^{r+2} \varepsilon_i - ({}^{r+1} \varepsilon_i)^2} \quad 29$$

$$2 \cdot a = \frac{{}^r \varepsilon_i \cdot {}^{r+3} \varepsilon_i - {}^{r+1} \varepsilon_i \cdot {}^{r+2} \varepsilon_i}{{}^r \varepsilon_i \cdot {}^{r+2} \varepsilon_i - ({}^{r+1} \varepsilon_i)^2} \quad 30$$

$$\lambda_i = a + i \cdot b \quad 31$$

maka nilai eigen adalah:

$$s_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad 32$$

Nilai ragam yang didapat dari hasil iterasi ini adalah ragam fundamental. Untuk ragam-ragam lain, sifat ortogonalitas masing-masing ragam dapat dimanfaatkan. Karena itu nilai ragam dan nilai eigen tersebut dapat dicari dengan cara berikut:

$$\{\phi\}_i^T \cdot [B] \cdot \{\phi\} = 0 \quad 33$$

$$\{\bar{\phi}\}_i^T \cdot [B] \cdot \{\phi\} = 0 \quad 34$$

$$\{\phi\}_i = \{\varepsilon\}_i + i \cdot \{\sigma\}_i \quad 35$$

$$\{\bar{\phi}\}_i = \{\varepsilon\}_i - i \cdot \{\sigma\}_i \quad 36$$

Substitusikan persamaan-persamaan tersebut, didapat:

$$\left(\{\varepsilon\}_i + i \cdot \{\sigma\}_i\right)^T \cdot [B] \cdot \left(\{\varepsilon\}_i + i \cdot \{\sigma\}_i\right) = 0 \quad 37$$

$$\left(\{\varepsilon\}_i - i \cdot \{\sigma\}_i\right)^T \cdot [B] \cdot \left(\{\varepsilon\}_i + i \cdot \{\sigma\}_i\right) = 0$$

Sesudah disederhanakan, didapat:

$$\epsilon_1^T . B \epsilon - \sigma_1^T . B \sigma + (\epsilon_1^T . B \sigma + \sigma_1^T . B \epsilon) i = 0 \quad 38$$

$$\epsilon_1^T . B \epsilon + \sigma_1^T . B \sigma + (\epsilon_1^T . B \sigma - \sigma_1^T . B \epsilon) i = 0 \quad 39$$

Cukup diambil 2 komponen untuk iterasi, yaitu:

$$\epsilon_1^T . B \epsilon = 0 \quad 40$$

Dan

$$\sigma_1^T . B \epsilon = 0 \quad 41$$

Semua persamaan disederhanakan secara aljabar menjadi:

$$\left( \frac{a}{b} \epsilon_1^T \{ \epsilon \}_i - \frac{1}{b} \epsilon_1^T \{ \epsilon \} \right)^T . [B] . \{ \epsilon \} = 0 \quad 42$$

$$\frac{a}{b} \epsilon_1^T \{ \epsilon \}_i . [B] . \{ \epsilon \} - \frac{1}{b} \epsilon_1^T \{ \epsilon \} . [B] . \{ \epsilon \} = 0$$

anggap persamaan pertama dari persamaan 42 sebagai persamaan pertama dan 1/b tidak nol., Maka:

$$\epsilon_1^T \{ \epsilon \}_i . B . \{ \epsilon \} = 0 \quad 43$$

Dengan demikian, untuk memastikan apakah iterasi dari *trial vector* konvergen, menuju ragam selanjutnya (ragam yang lebih tinggi), maka *trial vector* tersebut harus memenuhi kondisi ortogonalitas yaitu:

$$\epsilon_1^T \{ \epsilon \}_i . B . \{ \epsilon \} = 0 \quad \text{dan} \quad \epsilon_1^T \{ \epsilon \}_i . B . \{ \epsilon \} = 0 \quad 44$$

Dengan menggunakan dua kondisi tersebut, dihasilkan dua persamaan yang dapat diekspresikan sebagai matriks kondensasi, yaitu:

$$\{ D' \} . \{ \epsilon \} = \{ \epsilon \} \quad 45$$

Kalikan ulang dengan D, dihasilkan:

$$\{ D \} \{ D' \} . \{ \epsilon \} = \epsilon_1^T \{ \epsilon \} \quad 46$$

### 3. Studi Kasus

Dalam penelitian ini ditinjau portal seperti Gambar 1.



Gambar 1 Portal yang ditinjau

Dimensi kolom lantai satu 400 mm x 400 mm, sedangkan kolom di atasnya 300 mm x 300 mm. modulus elastisitas komponen struktur adalah 200.000 MPa. Tinggi antar lantai adalah 4 m untuk lantai dasar dan 3 m untuk lantai di atasnya. Massa lantai satu adalah 300.000 N.s<sup>2</sup>/m, sedangkan massa di atasnya adalah 240.000 N.s<sup>2</sup>/m. Pada setiap lantai terdapat redaman luar sebesar 18000 N.s/m.

Berdasarkan data tersebut dapat diperoleh nilai dan vektor eigen ragam pertama dan ke dua dengan cara iterasi sebagai berikut

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 6.369122 \cdot 10^{-3} \\ 0.014676 \\ 0.022639 \\ 0.030072 \\ 0.036801 \\ 0.042667 \\ 0.047534 \\ 0.051288 \\ 0.053841 \\ 0.055132 \\ -3.365085 \cdot 10^{-3} \\ -7.750771 \cdot 10^{-3} \\ -0.011955 \\ -0.015879 \\ -0.019431 \\ -0.022529 \\ -0.025098 \\ -0.02708 \\ -0.028427 \\ -0.029109 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -2.579791 \cdot 10^{-3} \\ -5.941491 \cdot 10^{-3} \\ -9.164042 \cdot 10^{-3} \\ -0.012172 \\ -0.014895 \\ -0.017269 \\ -0.019238 \\ -0.020757 \\ -0.02179 \\ -0.022313 \\ -6.631563 \cdot 10^{-3} \\ -0.015281 \\ -0.023573 \\ -0.031312 \\ -0.038318 \\ -0.044427 \\ -0.049494 \\ -0.053403 \\ -0.056061 \\ -0.057405 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{bmatrix} -1.14803E-12 \\ 5.34113E-12 \\ 9.48931E-12 \\ 1.12219E-11 \\ 1.02483E-11 \\ 6.81192E-12 \\ 1.97792E-12 \\ -3.28538E-12 \\ -7.53321E-12 \\ -9.92085E-12 \\ 1.38816E-10 \\ 4.61488E-11 \\ 4.81996E-11 \\ 4.22158E-11 \\ 2.9666E-11 \\ 1.28938E-11 \\ -5.72292E-12 \\ -2.27563E-11 \\ -3.61705E-11 \\ -4.35087E-11 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2.24171E-11 \\ 6.44993E-13 \\ 3.10349E-12 \\ 2.76755E-12 \\ 1.97998E-12 \\ 8.90657E-13 \\ -3.29616E-13 \\ -1.45416E-12 \\ -2.33129E-12 \\ -2.79949E-12 \\ -5.82538E-10 \\ 3.23947E-10 \\ -7.041E-12 \\ -8.05974E-12 \\ -7.21854E-12 \\ -4.71581E-12 \\ -1.26338E-12 \\ 2.44408E-12 \\ 5.4595E-12 \\ 7.18121E-12 \end{bmatrix}$$

Kedua vektor eigen tersebut digunakan dalam proses perhitungan pencarian respons dengan 2 metode yang diusulkan yaitu mode acceleration method dan modal truncation augmentation method. Kedua metode tersebut akan dibandingkan dengan mode displacement method. Berikut adalah ulasan mengenai ketiga metode tersebut.

#### 4. Mode Displacement Method

Untuk menghitung respons suatu struktur dengan redaman non-klasik, sistem tersebut ditransformasi menjadi sistem persamaan diferensial lepas (*uncoupled*) seperti halnya analisis sistem redaman klasik. Respons fisik tidak bisa dinyatakan dengan bilangan kompleks atau kojugatnya, karena itu, hasil respons ragam harus ditransformasi

menjadi respons fisik yang hanya merentang sistem bilangan riil. Perhitungan respons tersebut adalah sebagai berikut:

$$z_i(t) - s_i z_i(t) = \psi^T F_0 r(t) \quad 47$$

dengan menggunakan transformasi Laplace (complex domain) perpindahan ragam dapat dicari yaitu:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad 48$$

$$Z_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} z_i(t) dt \quad 49$$

Asumsikan bahwa  $z(0) = 0$   
 $\mathcal{L}\{Z(t)\} = Z(s) \quad 50$

$$\mathcal{L}(z(t)) = s.Z_1(s) - Z_1(0) \quad 51$$

$$\mathcal{L}(\Psi_i^T \cdot F_0 \cdot r(t)) = R(s) \quad 52$$

substitusi semua komponen tersebut ke persamaan diferensial, menghasilkan:

$$Z_1(s) = \frac{\mathcal{L}(\Psi_i^T \cdot F_0 \cdot r(t))}{s - s_i} \quad 53$$

dengan teorema konvolusi, didapat:

$$z_i(t) = \int_0^t e^{s_i(t-\Delta)} \Psi_i^T \cdot F_0 \cdot r(\Delta) \cdot d\Delta \quad 54$$

demikian pula untuk respons ragam konjugat kompleks:

$$\bar{z}_i(t) = \int_0^t e^{\bar{s}_i(t-\Delta)} \bar{\Psi}_i^T \cdot F_0 \cdot r(\Delta) \cdot d\Delta \quad 55$$

Respons fisik:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_1^{2q} \Psi_i \cdot z_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{2q} \Psi_i \cdot z_i + \bar{\Psi}_i \cdot \bar{z}_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^q \Re(\Psi_i \cdot z_i) \end{aligned} \quad 56$$

$$\{\Psi\}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ s_i \cdot x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_i \\ s_i \cdot x_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) &= x_i \cdot R_0 \cdot r(t) \quad 57 \\ &= \sum_{k=1}^n x_i^k \cdot R_0^k \cdot r(t) \end{aligned}$$

dengan demikian respons fisik adalah:

$$y(t) = 2 \cdot \sum_{i=1}^q \Re \Psi_i \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n x_i^k \cdot R_0^k \cdot \int_0^t e^{s_i(t-\Delta)} r(\Delta) \cdot d\Delta \right\} \quad 59$$

Bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat polar:

$$x = a + i \cdot b = |x| \cdot e^{i\theta} \quad 60$$

Komponen ke-m dari respons fisik di atas adalah:

$$y_m(t) = 2 \cdot \sum_{i=1}^q \Re \Psi_i^T \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n x_i^k \cdot R_0^k \cdot \int_0^t e^{s_i(t-\Delta)} \cdot e^{i(\beta(t-\Delta) + \theta_i^k + \theta_i^*)} r(\Delta) \cdot d\Delta \right\}$$

dengan menggunakan teorema Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$$

$$y_m(t) = 2 \cdot \sum_{i=1}^q \Re \Psi_i^T \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n x_i^k \cdot R_0^k \cdot \int_0^t e^{s_i(t-\Delta)} \cdot \cos(\beta(t-\Delta) + \theta_i^k + \theta_i^*) r(\Delta) \cdot d\Delta \right\}$$

## 5. Mode Acceleration Method

Prinsip dasar metode percepatan ragam adalah, berdasarkan definisi, jumlah ragam yang diambil secara akurat merentang *range* dari tingkat frekuensi beban, sedangkan respons akibat beban yang direpresentasikan dengan ragam yang tidak digunakan akan menghasilkan respons *quasi static*. Konsekuensinya, respons yang dihasilkan oleh ragam yang tidak diambil / digunakan tidak memiliki amplifikasi dinamik. Dengan kata lain, ragam-ragam yang digunakan tidak akan menyebabkan respons kecepatan atau percepatan. Percepatan dan kecepatan dapat ditentukan dengan menurunkan dari respons dari ragam yang diambil.

Dalam mengembangkan teori ini, persamaan (2.10) ditulis ulang sebagai:

$$y(t) = A^{-1} \cdot B \cdot y(t) - A^{-1} \cdot F_0(t) \quad 61$$

dengan menggunakan persamaan (2.11), persamaan tersebut menjadi:

$$y(t) = A^{-1} \cdot B \cdot \sum_{i=1}^{2q} \Psi_i \cdot z_i - A^{-1} \cdot F_0(t) \quad 62$$

Respons dari *Mode Acceleration method* dapat dinyatakan sebagai:

$$y_{ma}(t) = y_s(t) + y_{ma}(t) \quad 63$$

Bagian pertama ( $y_s(t)$ ) adalah respons dari ragam yang digunakan, dengan kata lain berasal dari analisis dengan *mode displacement method*. Sedangkan bagian kedua adalah peralihan penambah karena pemenggalan jumlah ragam yang digunakan.

$y_{ma}(t)$  Dihitung dengan mengurangkan persamaan (2.11) dari persamaan (2.52), didapatkan:

$$y_{ma}(t) = -A^{-1} R_s r(t) \quad 64$$

dengan  $R_t$  adalah vektor gaya pemenggalan yang didefinisikan sebagai:

$$R_t = F_0 - R_s \quad 65$$

dengan  $R_s$  adalah vektor beban ruang:

$$R_s = B \begin{bmatrix} \psi_1 & \bar{\psi}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 & \bar{\psi}_1 \end{bmatrix} F_0 \quad 66$$

## 6. Modal Truncation Augmentation Method

*Mode truncation augmentation method* sama seperti *mode acceleration method* berusaha untuk mengoreksi representasi yang tidak sesuai dari beban ruang (*spatial load*) dalam domain ragam dengan menciptakan "*pseudo-eigen*" atau *MT vectors* untuk menyertakan himpunan ragam dalam analisis respons. Terminologi dari "*pseudo-eigen*" digunakan sebab *MT vectors* ortogonal terhadap matriks komposisi A dan B tetapi tidak memenuhi permasalahan nilai eigen. *MT vectors* diturunkan dengan pendekatan matematika Rayleigh Ritz dengan berdasarkan vektor basis Ritz, dikembangkan dengan vektor pemenggalan gaya ruang (*spatial force truncation vector*),  $R_t$ .

*MT vectors* memiliki sifat ortogonal terhadap vektor eigen yang diambil sebab vektor gaya terpenggal (*truncation*) tidak mengandung komponen dari eigen-vector

yang digunakan. Untuk solusi respons, *MT vectors* dan frekuensi Rayleigh Ritz ditambahkan untuk eigen-vector yang digunakan dalam analisis respons ragam seolah-olah vektor tersebut adalah vektor eigen.

*MT vector* ditentukan mula-mula dengan menyelesaikan vektor peralihan

$$A \bar{P} = R_t \quad 67$$

*MT vector*,  $\bar{P}$ , dapat ditentukan dengan cara:

$$\bar{P} = \frac{1}{\alpha} \bar{P} \quad 68$$

$$\text{Dengan } \alpha = \sqrt{(\bar{P}^T \cdot B \cdot \bar{P})} \quad 69$$

Untuk analisis respons dengan metode *MT*, transformasi yang digunakan:

$$y_{mt} = P \cdot z_p(t) \quad 70$$

Dengan transformasi ini, dilakukan reduksi dari persamaan (2.10) sedemikian sehingga:

$$P^T \cdot B \cdot P \cdot z_p(t) - P^T \cdot A \cdot P \cdot z_p(t) = P^T \cdot R_t \cdot r(t) \quad 71$$

persamaan tersebut dapat disederhanakan lagi menjadi:

$$z_p(t) - s_p \cdot z_p(t) = P^T \cdot R_t \cdot r(t) \quad 72$$

$$\text{Dengan } s_p = P^T \cdot A \cdot P$$

$z_p(t)$  Dihitung dari persamaan (2.61), dan kemudian  $z_p(t)$  ditransformasi balik untuk menghasilkan solusi *MT* yang merepresentasikan ragam yang tidak digunakan.

Dengan demikian didapat:

$$y_{mt}(t) = P \cdot z_p(t) \quad 73$$

$$y_{mt}(t) = y_s(t) + y_{ma}(t) \quad 74$$

## 7. Perbandingan Mode Acceleration Method dan Mode Truncation Augmentation Method

### 7.1. Karakteristik dari Modal Truncation Augmentation Method untuk Sistem Teredam secara Non-Klasik

#### 7.1.1. Kestabilan

Untuk memeriksa kestabilan dari metode MT, solusi umum untuk persamaan diferensial gerak yang dinyatakan dalam koordinat state space diselesaikan untuk kondisi awal  $z_p(0) = 0$ , dengan pembebanan harmonik  $r(t) = \sin(\bar{\omega}t)$  diberikan pada struktur. Solusi tersebut adalah:

$$z_p(t) = \frac{P^T R_t}{s_p^2 + \bar{\omega}^2} (\bar{\omega} e^{s_p t} - s_p \sin(\bar{\omega}t) - \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t)) \quad 75$$

Gaya yang diterapkan diasumsikan sebagai beban harmonik sebab beban luar seperti gempa dapat direpresentasikan dalam kombinasi beban harmonik.

Persamaan di atas stabil ketika memenuhi kondisi:

$$s_p^T A s_p < 0 \quad 76$$

Jika kondisi di atas tidak dipenuhi, maka metode ini akan divergen. Dengan demikian metode MT dapat diaplikasikan pada sistem teredam secara non-klasik selama syarat kestabilan persamaan terpenuhi. Kestabilan bergantung pada input beban (konfigurasi pembebanan), jenis beban, konfigurasi massa tiap lantai, momen inersia kolom, dan besarnya redaman.

#### 7.1.2. Karakteristik Solusi Mode Truncation Augmentation Method

Ketika kondisi kestabilan terpenuhi, suku pertama dari persamaan tersebut dapat diabaikan sebab mengecil secara cepat. Suku yang ketiga pun dapat diabaikan jika  $|s_p| \gg \bar{\omega}$  Terpenuhi. Persamaan dapat disederhanakan menjadi:

$$z_p(t) = \frac{-P^T R_t}{s_p} \sin(\bar{\omega}t) \quad 77$$

Untuk kebanyakan struktur,  $|s_p| \gg \bar{\omega}$ , sebab elemen matriks A adalah properti material struktur yang mana  $\bar{\omega}$  adalah frekuensi beban luar. Lalu  $z_p(t)$  dapat ditransformasi balik untuk menghasilkan solusi dari metode MT untuk peralihan yang mewakili ragam yang tidak digunakan:

$$y_{mt}(t) = P z_p(t) = \frac{P P^T R_t}{s_p} \sin(\bar{\omega}t) \quad 78$$

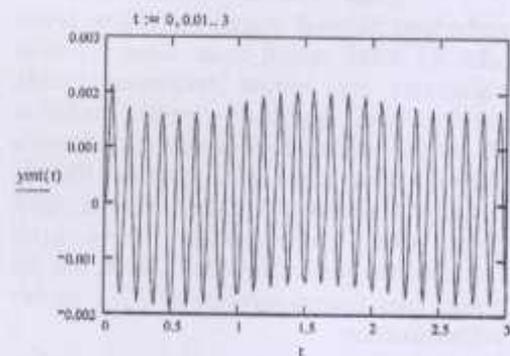
Sedangkan  $P = \frac{1}{\alpha} A^{-1} R_t$  sehingga solusi metode MT adalah:

$$y_{mt}(t) = \frac{P^T R_t}{\alpha s_p} \sin(\bar{\omega}t) \quad 79$$

Dengan hubungan  $R_t = A \alpha P$  dan  $s_p = P^T A P$ , maka

$$y_{mt}(t) = \frac{-P^T R_t}{\alpha s_p} A^{-1} R_t \sin(\bar{\omega}t) = -A^{-1} R_t \sin(\bar{\omega}t) = y_{mt}(t) \quad 80$$

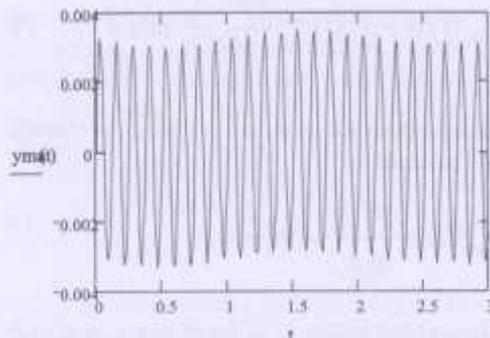
Secara singkat dapat dikatakan bahwa metode MT dibatasi oleh kondisi kestabilan metode tersebut. Ketika nilai  $s_p < 0$ , maka metode MT dikatakan stabil dan dapat diaplikasikan pada sistem struktur teredam secara non-klasik dan hasilnya harus hampir sama dengan metode MA. Solusi metode ini dapat dilihat pada gambar 2



Gambar 2 Solusi modal truncation augmentation method

## 7.2. Karakteristik dari Modal Displacement Method untuk Sistem Tereadam secara Non-Klasik

Metode ini tidak mempunyai batasan dalam kestabilan solusi sehingga dapat berlaku untuk berbagai kasus beban. Solusi metode ini dapat dilihat pada gambar 3



Gambar 3 Solusi modal acceleration method

Terlihat dari kedua output tersebut bahwa metode mode acceleration dan metode modal truncation augmentation method menghasilkan respons yang mendekati meskipun dengan konsep yang berbeda. Perbedaan akan menjadi tidak signifikan ketika  $|s_p|$  sangat besar dan jauh lebih besar dari  $\omega$ . Namun kedua metode tersebut melengkapi respons dari *mode displacement method* meskipun kedua metode tersebut masih memiliki kekurangan.

Pada kedua output tersebut, perbedaan menjadi cukup signifikan sebab nilai  $|s_p|$  tidak sangat besar. Besarnya nilai parameter ini sangat tergantung pada karakteristik gedung seperti modulus elastisitas, dimensi penampang, besarnya redaman luar, serta pembebanan. Khusus untuk pembebanan,  $|s_p|$  dapat berbeda untuk besar dan penempatan serta arah pembebanan yang berbeda. Dalam hal ini beban yang mempengaruhi nilai  $|s_p|$  adalah beban invarian.

## 8. Kesimpulan dan Rekomendasi

### 8.1. Kesimpulan

Metode *mode acceleration* dan metode *modal truncation augmentation* merupakan suatu metode untuk pencarian respons tanpa perlu menghitung semua ragam dan nilai eigen. Pemotongan jumlah nilai eigen yang terlalu besar akan menyebabkan penyimpangan respons yang cukup jauh sehingga respons yang didapatkan tidak mewakili untuk perhitungan lebih lanjut.

Alternatif perhitungan lain adalah dengan *Direct integration method*, namun metode ini cukup efektif ketika durasi pembebanan relatif pendek. Selain itu perhitungan metode ini melibatkan analisis numerik yang tidak praktis.

Perhitungan manual masih dirasakan cukup diperlukan. Karena itu, dalam skripsi ini diusulkan metode *mode acceleration* dan metode *modal truncation augmentation* yang dapat memberikan respons tanpa kehilangan ketelitian yang signifikan.

Pada metode *modal truncation augmentation*, terjadi determinasi yaitu hanya untuk kasus tertentu saja metode ini dapat diaplikasikan. Kasus tersebut adalah seperti konfigurasi pembebanan, konfigurasi massa lantai, kekakuan, dan redaman luar. Hal tersebut direpresentasikan dalam nilai  $s_r = P^T \cdot A \cdot P$ . Jika nilai  $s_r$  jauh lebih kecil dari nol, maka respons dengan metode *modal truncation augmentation* konvergen menuju solusi eksak.

### 8.1. Rekomendasi

Berdasarkan penelitian, metode *mode acceleration* lebih direkomendasikan sebab pada metode ini berlaku umum, artinya berlaku untuk berbagai kondisi seperti konfigurasi pembebanan, dimensi penampang, dan modulus elastisitas. Untuk metode *modal truncation augmentation*, solusi stabil hanya untuk kasus tertentu saja, yaitu jika kasus memenuhi kestabilan persamaan.